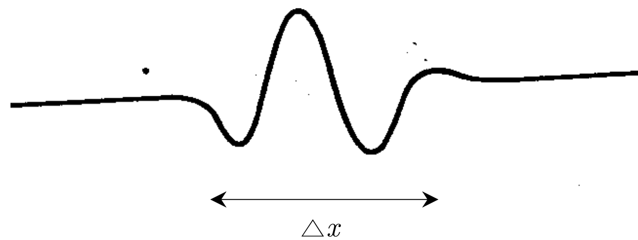
2.2 입자-파동의 이중성과 불확정성 원리

앞 절에서와 같이 입자를 파동의 묶음으로 생각하면 우리는 파동의 묶음이 존재하는 영역을 그 입자의 존재영역으로 생각할 수 있을 것이다. 이러한 경우 입자의 위치는 파동의 존재영역에 해당하는 만큼의 불확정성을 갖게 될 것이며, 이렇게 표현된 입자 위치의 불확정성이 작아질수록 파동의 파장은 정확하게 정의하기 어려워지게 된다. 한편 파동의 특성은 파수(wave number)와 연관된 드브로이 관계식을 써서 운동량의 특성으로 바꾸어 생각할 수 있으므로, 파동의 존재영역(입자 위치의 불확정성)이 작아질수록 파수 또는 운동량을 정확하게 아는 것은 더욱 어려워져서, 운동량의 불확정성은 더욱 커지게 된다. 우리는 이 절에서 이러한 파동과 입자의 이중성에 따른 위치와 운동량의 불확정성 관계를 살펴보고자 한다.

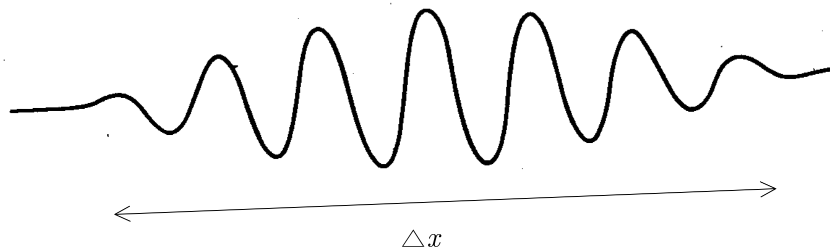
• 입자-파동의 이중성과 위치와 운동량의 불확정성

두 개의 입자가 각각 다음과 같은 파동묶음으로 구성된 경우를 생각해 보자. 입자1([그림2.3])의 경우 입자2([그림2.4])와 비교할 때 위치의 불확정성($\triangle x$)은 상대적으로 작으나, 파동의 파장을 정의하기는 상대적으로 어렵고, 입자2의 경우 상대적으로 위치의 불확정성은 크나, 파동의 파장은 반대로 정의하기가 쉽다.



[그림2.3] 입자1의 파동묶음 표현

여기서 파동묶음이 대략 n개의 파장(λ)을 포함하고 있다면 위치의 불확정성은 $\triangle x \sim n\lambda$로 표현할 수 있을 것이다. 그런데, 드브로이 관계식($p = \hbar k$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$)에서 $\lambda = \frac{h}{p}$ 이므로 $\triangle x \sim \frac{nh}{p}$ 로 쓸 수 있다. 한편, 파장의 정확성은 파장의 개수 n에 비례할 것이므로 우리는 대략 $\frac{1}{n} \sim \frac{\triangle\lambda}{\lambda}$로 쓸 수 있고, 드브로이 관계식에서 $\triangle\lambda = \lambda\frac{\triangle p}{p}$로 쓸 수 있으므로 $\frac{\triangle p}{p} \sim \frac{1}{n}$로 주어진다. 그러므로 $\triangle x \triangle p \sim \frac{nh}{p} \cdot \frac{p}{n} = h$으로 주어짐을 볼 수 있다.



[그림2.4] 입자2의 파동묶음 표현

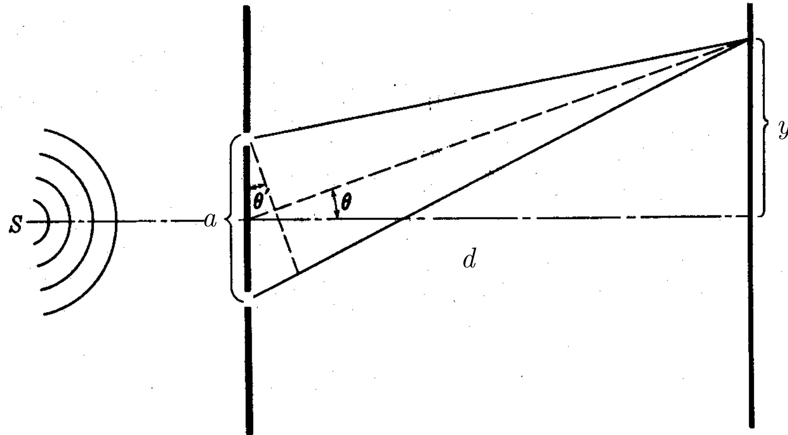
자유입자의 경우 앞 절에서 살펴 본 평면파 $\exp[i(kx-w_k t)]$ 로 통상 표현되므로 이 경우는 n이 무한대가 되어 위치의 불확정성 $\triangle x$는 무한대가 되고, 운동량은 $\hbar k$의 값을 가지므로 운동량의 불확정성 $\triangle p$는 0이 된다.
양자역학에서 시간 t는 연산자로 취급되지 않고 항상 매개변수(parameter)로 취급된다. 그러나 우리는 상대성이론에서 시간과 공간이 합하여 시공간을 이루고 있으며 위치와 운동량을 함께 취급하는 위상공간에서의 상대론적 표현은 공간좌표의 짝이 운동량이고 시간의 짝은 에너지가 된다는 것을 잘 알고 있다. 그러므로 우리는 시간과 에너지의 경우에도 위치와 운동량의 경우와 같은 불확정성의 관계에 있음을 짐작할 수 있는데, 위에서 얻어진 위치와 운동량 사이의 불확정성 관계를 써서 대략 다음과 같이 그 관계를 보일 수 있다.

$$\triangle x \triangle p \sim \triangle t \frac{p}{m} \cdot \triangle p \sim \triangle t \triangle \left(\frac{p^2}{2m}\right) \sim \triangle t \triangle E \sim h$$

앞 장에서도 언급하였지만, 위치와 운동량 사이의 정확한 불확정성 관계식은 $\triangle x \triangle p \geqq \frac{\hbar}{2}$ 이며 이는 하이젠베르크의 교환자 관계식 $[x,p]=i\hbar$ 로부터 나온다. 우리는 연산자를 다루는데 좀 더 익숙해진 다음 장에서 이 관계식을 증명하도록 하겠다.

• 불확정성 원리와 상보성

우리는 앞 장의 마지막 부분에서 상보성을 설명하면서, 불확정성의 원리와 관계가 있다고 언급한 바 있다. 이러한 관계를 우리는 이중슬릿 간섭실험의 경우에서 살펴보기로 하겠다. 상보성이란 앞 장에서도 설명하였지만, 입자와 파동의 이중성 중에서 어떤 하나의 관점만을 택하여 주어진 상태를 기술하여야지 동시에 두 개의 관점 모두를 사용하여 기술할 수는 없다는 것이다. 이와 같은 상황은 1.5절에서 살펴본 이중슬릿의 간섭실험에서 입자가 어떤 슬릿을 통과하였는지 알 수 있게 해주는 탐지기를 이중슬릿 사이에 설치하여, 간섭무늬가 사라지는 경우에서 여실히 나타난다. 간섭무늬는 파동성의 산물인데, 탐지기로 입자를 측정할 경우, 파동성은 사라지고 입자성만 나타나게 되어 간섭무늬가 사라졌다고 우리는 해석할 수 있다. 이는 우리가 어떤 상태에 입자성과 파동성을 동시에 함께 적용할 수 없음을 뜻하는 상보성의 한 사례라고 할 수 있겠다. 그렇다면, 탐지기로 측정하였을 때 간섭무늬가 왜 사라지는 것인지 한번 살펴보기로 하자.
아래 [그림2.5]에 이중슬릿 간섭실험이 표시되어 있다. 두 슬릿 사이의 거리를 a, 슬릿과 스크린 사이의 거리를 d라 하고, 스크린의 중앙에서 간섭무늬까지의 거리를 y라고 하자. 그리고 슬릿 사이의 거리 a보다 슬릿과 스크린 사이의 거리 d가 훨씬 크다고 하자($a \ll d$). 그러면 n번째 밝은 점에 도달하는 위 슬릿과 아래 슬릿에 의한 경로차는 $a\sin\theta'_n = n\lambda$ 로 주어진다. 여기서 $a \ll d$ 이므로 우리는 $\theta'_n \cong \theta_n$ 과 $\sin\theta_n \cong \frac{y_n}{d}$ 으로 근사할 수 있다. 즉, $y_n \cong d\frac{n\lambda}{a}$ 로 표현할 수 있다. 그러므로 n 번째 밝은 점과 $n+1$ 번째 밝은 점 사이의 거리는 $\triangle y = y_{n+1} - y_n \cong \frac{d\lambda}{a}$ 로 주어진다.



[그림2.5] 이중슬릿에서 입자를 탐지하는 경우

한편, 이중슬릿 사이에 탐지기를 설치하여 입자가 통과한 슬릿을 알게 되면, 이중슬릿을 통과한 직후 입자가 갖는 위치의 불확정성은 $\frac{a}{2}$보다 작아야 한다. 여기서 불확정성의 원리를 적용하면($\triangle y \triangle p_y \geqq \frac{\hbar}{2}$), 이 경우 수직방향으로 운동량의 불확정성은 $\triangle p_y \geq \frac{\hbar}{a}$ 가 되어야 한다. 한편, 수평방향으로의 운동량을 p_x라고 하면, 이 입자의 드브로이 파장은 $\lambda = \frac{\hbar}{p_x}$ 로 주어진다. 그런데, 수직방향으로의 운동량이 $\triangle p_y \geq \frac{\hbar}{a}$ 만큼 있을 수 있으므로 수평방향으로 d만큼 진행한 후에는 수직방향으로 $\triangle y \sim d\frac{\triangle p_y}{p_x} \geq d\frac{\hbar}{a}\frac{\lambda}{\hbar} = \frac{d\lambda}{a}$ 만큼의 위치의 불확정성을 갖게 된다. 즉, 스크린 상에서 수직방향으로 위치의 불확정성이 우리가 앞에서 계산한 밝은 점들 사이의 간격보다 커지게 되어 간섭무늬가 없어지게 된다. 이는, 불확정성의 원리를 가정할 경우 파동성의 구현에서 입자성의 구현으로 상태가 바뀌었다는 상보성에 따른 기술을 우리가 설명할 수 있음을 보여준다.

• 불확정성 원리와 원자의 안정성

우리는 앞 장에서 고전적인 개념의 원자는 매우 불안정하다는 것을 언급하였다. 보어의 원자모형에서는 이러한 불안정성이 전자의 각운동량이 양자화 된 경우에는 없다고 가정함으로써 논란을 피하였다. 하지만 전자가 원자궤도에서 궤도운동을 한다면, 고전 전자기이론에 의한 전자의 에너지 방출은 피할 수가 없기 때문에 원자의 불안정성 논란을 잠재울 수 없다. 그렇다면 양자역학적으로는 어떻게 원자의 안정성을 설명할 수 있을까?
우리는 전자가 원자 내에서 어떻게 운동하고 있는지 고전역학에서처럼 궤적을 구하여 설명할 수는 없다. 다만, 전자가 존재 가능한 위치들을 상태함수로써 표현할 뿐이다. 그리고 가능한 위치들의 분포는 에너지 준위에 따라 각각 다르다. 바닥상태의 경우 통상 구 모양을 하지만, 들뜬 상태들의 경우 여러 가지 다양한 모양을 갖는다. 고전적인 타원궤도 운동을 하지 않는다면 전자와 원자핵 사이의 전기적 인력을 상쇄할 원심력이 존재하지 않을 터인데

어떻게 전자가 원자핵의 전기적 인력을 이겨낼 수 있을까? 그 답은 바로 불확정성 원리이다. 만약 전자가 원자핵에 의한 전기적 인력을 이겨내지 못하여 원자핵 근처로 가까이 가서 머문다면 전자의 위치의 불확정성은 그만큼 작아지게 될 것이다. 이는 불확정성의 원리에 의해서 위치의 불확정성이 줄어지는 것에 비례하여 운동량의 불확정성을 커지게 할 것이며, 이는 곧 운동량 자체의 증대를 의미하게 된다. 즉, 전자가 전기적 인력에 의하여 원자핵에 가까이 존재하게 되는 만큼 전자의 운동량의 불확정성은 더욱 커져서 전자의 운동에너지의 증가를 가져오며 이는 전자를 원자핵으로부터 더욱 멀어지게 할 것이다. 이처럼 전자와 원자핵 사이의 전기적 인력과 불확정성 원리에 따른 전자 운동에너지의 증가에 의한 전자와 원자핵 사이의 반발력이 서로 균형을 이루는 선에서 원자 내에서 전자의 존재 가능한 위치가 결정될 것이다. 이와 같이 하여 생긴 전자의 존재 가능한 영역들을 우리는 전자구름이라 부르며 이는 원자내부 전자의 에너지 준위에 따라 결정되는 파동함수로부터 얻어진다. 이러한 파동함수는 슈뢰딩거 방정식을 풀어서 정확하게 얻을 수 있지만, 여기서는 간단히 불확정성 원리를 적용하여 앞에서 얻은 보어의 원자모형 결과와 비교하도록 하겠다.
논의를 간편하게 하기 위하여 수소원자의 경우를 생각하면, 전자의 에너지는 다음과 같이 주어진다.

$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$, p는 운동량이고, r은 전자와 원자핵 사이의 거리이다.

여기서 전자의 존재위치를 위치의 불확정성으로 볼 수 있으므로($\triangle x \sim r$), 이 경우 운동량의 불확정성은 불확정성 원리($\triangle x \triangle p \sim \hbar$)에서 대략 $\triangle p \sim \frac{\hbar}{r}$가 될 것이다. 여기서 운동량의 불확정성이 대략 운동량과 비슷하다고 하면($p \sim \triangle p \sim \frac{\hbar}{r}$), 에너지는 대략 다음과 같이 주어진다. $E = \frac{1}{2m}(\frac{\hbar}{r})^2 - \frac{e^2}{r}$, 여기서 가장 낮은 에너지 상태가 가장 안정적인 상태가 될 것이므로 그러한 안정한 상태를 주는 r은 $\frac{\partial E}{\partial r} = 0$을 만족하여야 한다.

즉, $\frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{1}{m}\frac{\hbar^2}{r^3} + \frac{e^2}{r^2} = 0$ 에서 $r = \frac{\hbar^2}{me^2}$ 으로 주어진다. 이 값은 우리가 1장에서 얻은 보어반경 a_0와 일치하며, 이를 에너지에 대입하면, $E = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = -\mathbb{R}$ 로 주어져서 ($\mathbb{R}$은 리드버그 상수로 $13.6eV$에 해당), 보어의 원자모형에서 얻은 바닥상태의 에너지와 일치함을 보여준다.